I. Ordered Pairs

Definition: An ordered pair is a pair of elements written in a specific order. It is denoted by (a, b), where ‘a’ is the first element (also called the x-coordinate or abscissa) and ‘b’ is the second element (also called the y-coordinate or ordinate).

Importance of Order: The key difference between an ordered pair and a set is that order matters. {a, b} is the same as {b, a}, but (a, b) is not the same as (b, a) unless a = b.

Equality of Ordered Pairs: (a, b) = (c, d) if and only if a = c and b = d. This is a fundamental property used in many proofs and constructions.

Examples:

(2, 5) is an ordered pair. 2 is the first element, 5 is the second.

(5, 2) is a different ordered pair from (2, 5).

(3, 3) is an ordered pair where both elements are the same.

(x, y) represents a general ordered pair, often used in coordinate geometry.

(name, age) - representing a person’s name and age.

II. Cartesian Product

Definition: The Cartesian product of two sets A and B, denoted by A × B, is the set of all possible ordered pairs where the first element comes from A and the second element comes from B.

$A \times B = \{ (a, b) \mid a \in A \text{ and } b \in B \}$

Read as: “A cross B”

Cardinality: If A has m elements and B has n elements, then A × B has m ∗ n∗ elements.

|A × B| = |A| ∗ |B|

Non-Commutativity: In general, A × B ≠ B × A (unless A = B or either A or B is the empty set). The ordered pairs will be different.

Cartesian Product with Itself: A × A is often written as A². Example: ℝ × ℝ = ℝ², which represents the Cartesian plane.

Empty Set: If either A or B is the empty set (∅), then A × B = ∅. There are no possible ordered pairs.

Cartesian Product of Multiple Sets: Can be extended to more than two sets:

A × B × C = { (a, b, c) | a ∈ A, b ∈ B, c ∈ C } (This is a set of ordered triples)

Examples:

Let A = {1, 2} and B = {a, b, c}.

A × B = {(1, a), (1, b), (1, c), (2, a), (2, b), (2, c)}

B × A = {(a, 1), (a, 2), (b, 1), (b, 2), (c, 1), (c, 2)}

Let A = {x, y}

A × A = A² = {(x,x), (x,y), (y,x), (y,y)}

Let A = {1} and B = {2, 3}.

A × B = {(1, 2), (1, 3)}

B × A = {(2, 1), (3, 1)}

Let A = ∅ and B = {1, 2}.

A × B = ∅

B × A = ∅

ℝ × ℝ × ℝ = ℝ³, which represents three-dimensional space.

III. Applications

Coordinate Geometry: The Cartesian plane (ℝ²) is fundamental to graphing functions, relations, and geometric shapes.

Databases: Relations (tables) in a database can be viewed as subsets of a Cartesian product of attribute domains.

Computer Science: Representing state spaces in algorithms, defining input/output spaces for functions, and in the design of data structures.

Set Theory: The Cartesian product is a fundamental construction in set theory and is used to define relations and functions formally.

Probability: In probability, the sample space of an experiment can be represented as a Cartesian product of the possible outcomes of individual trials.

IV. Key Takeaways

Ordered pairs are fundamental building blocks for many mathematical concepts.

Order matters in ordered pairs.

The Cartesian product creates a new set consisting of all possible ordered pairs from two sets.

Understand the cardinality of a Cartesian product.

Be aware of the non-commutative nature of the Cartesian product.

The Cartesian product has wide-ranging applications in mathematics, computer science, and other fields.

These notes should give you a good foundation for understanding ordered pairs and Cartesian products. Remember to practice with examples to solidify your understanding.

I. क्रमित युग्म (Ordered Pairs)

परिभाषा (Definition): एक क्रमित युग्म दो तत्वों का एक युग्म होता है जो एक विशिष्ट क्रम में लिखा जाता है। इसे (a, b) द्वारा दर्शाया जाता है, जहाँ ‘a’ पहला तत्व है (जिसे x-निर्देशांक (x-nirdeshank) या भुज (bhuj) भी कहा जाता है) और ‘b’ दूसरा तत्व है (जिसे y-निर्देशांक (y-nirdeshank) या कोटि (koti) भी कहा जाता है)।

क्रम का महत्व (Importance of Order): एक क्रमित युग्म और एक समुच्चय (set) के बीच मुख्य अंतर यह है कि क्रम मायने रखता है। $\{a, b\}$ और $\{b, a\}$ एक ही हैं, लेकिन $(a, b) \neq (b, a)$ जब तक कि $a = b$ न हो।

क्रमित युग्मों की समानता (Kramit Yugmon ki Samanta) - Equality of Ordered Pairs: $(a, b) = (c, d)$ यदि और केवल यदि $a = c$ और $b = d$। यह एक मूलभूत गुण है जिसका उपयोग कई प्रमाणों और संरचनाओं में किया जाता है।

उदाहरण (Udharan) - Examples:

(2, 5) एक क्रमित युग्म है। 2 पहला तत्व है, 5 दूसरा है।

(5, 2), (2, 5) से अलग एक क्रमित युग्म है।

(3, 3) एक क्रमित युग्म है जहाँ दोनों तत्व समान हैं।

(x, y) एक सामान्य क्रमित युग्म का प्रतिनिधित्व करता है, जिसका उपयोग अक्सर निर्देशांक ज्यामिति (coordinate geometry) में किया जाता है।

(नाम, उम्र) - किसी व्यक्ति के नाम और उम्र का प्रतिनिधित्व करना। (naam, umar)

II. कार्तीय गुणन (Cartesian Product):

परिभाषा (Paribhasha) - Definition: दो समुच्चयों (sets) A और B का कार्तीय गुणन, जिसे A × B द्वारा दर्शाया जाता है, सभी संभावित क्रमित युग्मों का समुच्चय है जहाँ पहला तत्व A से आता है और दूसरा तत्व B से आता है।

A × B = { (a, b) | a ∈ A और b ∈ B }

पढ़ें (Padhe) - Read as: “A क्रॉस B”

कार्डिनैलिटी (Cardinality): यदि A में m तत्व हैं और B में n तत्व हैं, तो A × B में m ∗ n∗ तत्व होंगे।

|A × B| = |A| ∗ |B|

गैर-विनिमेयता (Gair-Vinimayata) - Non-Commutativity: सामान्य तौर पर, A × B ≠ B × A (जब तक कि A = B या तो A या B खाली समुच्चय (empty set) न हो)। क्रमित युग्म अलग-अलग होंगे।

स्वयं के साथ कार्तीय गुणन (Swayam ke Sath Karteeya Gunan) - Cartesian Product with Itself: A × A को अक्सर A² के रूप में लिखा जाता है। उदाहरण: ℝ × ℝ = ℝ², जो कार्तीय तल (Cartesian plane) का प्रतिनिधित्व करता है।

खाली समुच्चय (Khali Samuchchay) - Empty Set: यदि A या B खाली समुच्चय (∅) है, तो A × B = ∅। कोई संभावित क्रमित युग्म नहीं हैं।

एकाधिक समुच्चयों का कार्तीय गुणन (Cartesian Product of Multiple Sets): इसे दो से अधिक समुच्चयों तक बढ़ाया जा सकता है:

A × B × C = { (a, b, c) | a ∈ A, b ∈ B, c ∈ C } (यह क्रमित त्रिकों (trikon) का एक समुच्चय है)

उदाहरण (Udharan) - Examples:

मान लीजिए A = {1, 2} और B = {a, b, c}।

A × B = {(1, a), (1, b), (1, c), (2, a), (2, b), (2, c)}

B × A = {(a, 1), (a, 2), (b, 1), (b, 2), (c, 1), (c, 2)}

मान लीजिए A = {x, y}

A × A = A² = {(x,x), (x,y), (y,x), (y,y)}

मान लीजिए A = {1} और B = {2, 3}।

A × B = {(1, 2), (1, 3)}

B × A = {(2, 1), (3, 1)}

मान लीजिए A = ∅ और B = {1, 2}।

A × B = ∅

B × A = ∅

ℝ × ℝ × ℝ = ℝ³, जो त्रि-आयामी स्थान (three-dimensional space) का प्रतिनिधित्व करता है।

III. अनुप्रयोग (Applications):

निर्देशांक ज्यामिति (Nirdeshank Jyamiti) - Coordinate Geometry: कार्तीय तल (ℝ²) फलनों (functions), संबंधों (relations) और ज्यामितीय आकृतियों (geometric shapes) को ग्राफ़ करने के लिए मूलभूत है।

डेटाबेस (Database): डेटाबेस में संबंध (तालिकाएँ) विशेषता डोमेन (attribute domain) के कार्तीय गुणन के उपसमुच्चय के रूप में देखे जा सकते हैं।

कंप्यूटर विज्ञान (Computer Vigyan) - Computer Science: एल्गोरिदम में राज्य स्थानों (state spaces) का प्रतिनिधित्व करना, फलनों के लिए इनपुट/आउटपुट स्थानों को परिभाषित करना, और डेटा संरचनाओं के डिजाइन में।

समुच्चय सिद्धांत (Set Theory): कार्तीय गुणन समुच्चय सिद्धांत में एक मूलभूत संरचना है और इसका उपयोग औपचारिक रूप से संबंधों और फलनों को परिभाषित करने के लिए किया जाता है।

संभावना (Probability): संभावना में, एक प्रयोग के नमूना स्थान (sample space) को व्यक्तिगत परीक्षणों के संभावित परिणामों के कार्तीय गुणन के रूप में दर्शाया जा सकता है।

IV. मुख्य बातें (Key Takeaways)

क्रमित युग्म कई गणितीय अवधारणाओं के लिए मूलभूत निर्माण खंड हैं।

क्रमित युग्मों में क्रम मायने रखता है।

कार्तीय गुणन दो समुच्चयों से सभी संभावित क्रमित युग्मों से युक्त एक नया समुच्चय बनाता है।

कार्तीय गुणन की कार्डिनैलिटी को समझें।

कार्तीय गुणन की गैर-विनिमेय प्रकृति के बारे में जागरूक रहें।

कार्तीय गुणन के गणित, कंप्यूटर विज्ञान और अन्य क्षेत्रों में व्यापक अनुप्रयोग हैं।

ये नोट्स आपको क्रमित युग्मों और कार्तीय गुणन को समझने के लिए एक अच्छी नींव प्रदान करने चाहिए। अपनी समझ को ठोस बनाने के लिए उदाहरणों के साथ अभ्यास करना याद रखें।